

TABLE DES MATIÈRES

AVANT-PROPOS	7
I. DE QUOI PARLAIT LE GÉOMÈTRE GREC	9
Que le géomètre grec fait état d'objets auxquels il applique des prédicats pourvus d'un, de deux, de trois, etc. arguments. Caractérisation du <i>type</i> des différents prédicats, monadiques, dyadiques, triadiques, tétradiques, mobilisés par l'auteur euclidien	9
Que la manière dont Euclide a ébauché les divers prédicats du premier ordre, auxquels devait recourir le vocabulaire de sa géométrie, appelait d'indispensables corrections, comme le montrent en particulier les <i>Grundlagen der Geometrie</i> de Hilbert. Qu'il est néanmoins remarquable que l'auteur des quatre premiers livres des <i>Éléments</i> s'y soit contraint à se maintenir dans les limites du premier ordre logique	14
Que la définition 5 du livre V réussit, à l'intérieur de ces limites, à caractériser l'identité de deux raisons comme proportion entre quatre objets individuels. Que le recours à une telle relation d'équivalence permet à l'auteur euclidien d'approcher, au niveau des raisons, les quatre opérations classiques	17
Que le livre V ouvrait ainsi l'accès aux résultats dont font état non seulement les livres VI, XI et XII des <i>Éléments</i> , mais encore les œuvres géométriques d'Archimède et d'Apollonius, sans qu'il y eût à sortir <i>en droit</i> des limites du premier ordre logique	21
Que le maintien du discours géométrique dans de telles limites empêchait le nombre entier naturel, malgré certaines apparences, d'avoir en tant que tel sa place dans le discours du géomètre grec	22

Que la théorie des grandeurs, ainsi conçue, n'empêchait pas d'accéder à certaines notions d'ordre physique. L'exemple de la notion de <i>vitesse</i> chez Aristote d'abord, chez Archimède ensuite	23
II. DE QUOI PARLAIT L'ARITHMÉTIQUE EUCLIDIENNE	27
Que l'auteur des livres arithmétiques s'est gardé de traiter les nombres comme des prédicats d'individus. Qu'il les traite eux-mêmes comme des individus. Que son attitude revient à admettre deux termes premiers indéfinis, l'unité et l'opération d'addition. Que sur cette base il construit les divers objets et les autres opérations de l'arithmétique. L'arithmétique elle-même ainsi conçue comme un discours du premier ordre logique	27
Qu'une telle arithmétique n'avait pas besoin qu'on y ajoutât la notion de <i>mesure</i> , dont la présence au niveau de ses définitions surprend	32
Qu'on ne peut pas dire qu'Euclide ne donne pas une présentation axiomatique de son arithmétique	33
Pourquoi les nombres entiers, introduits de cette manière, peuvent efficacement jouer leur rôle d'individus relatifs	34
Que cet état de choses obligeait à séparer rigoureusement le traitement des objets de la géométrie et celui des objets de l'arithmétique. L'exception du livre X et de certains développements du livre XIII. Pourquoi les livres VII, VIII et IX d'Euclide ne font jamais recours à ceux qui les précèdent, sauf aux <i>notions communes</i> placées en tête du livre I. L'exemple des propositions 14, 20 et 36 du livre IX	35
Conclusion d'ensemble sur la situation respective de la géométrie et de l'arithmétique euclidiennes: qu'il était paradoxalement nécessaire que ces deux disciplines fussent bien établies distinctement l'une de l'autre pour qu'elles le fussent l'une et l'autre sur la base du premier ordre logique	40
III. L'ACCESSION AUX OBJETS DE LA GÉOMÉTRIE CARTÉSIENNE	45
Que la nécessité d'étendre la notion de <i>mesure</i> au delà des limites à l'intérieur desquelles l'auteur euclidien l'avait enfermée amène déjà la tradition arabo-islamique à renoncer à la rupture euclidienne entre mathématique des grandeurs géométriques et mathématique des nombres	45
Que cette renonciation permettait d'obtenir certains résultats qui, sans elle, fussent restés inaccessibles. L'exemple de la	

<i>formule de Héron</i> : ce qui excluait déjà sa simple énonciation de la tradition euclidienne ; la réserve que manifesteront Descartes à son égard	48
Que la démonstration de cette <i>formule de Héron</i> induisait à étendre à la géométrie l'application de certains théorèmes dont l'auteur euclidien avait limité la validité à l'arithmétique	51
La prétention, affichée dès les premières pages de <i>La Géométrie</i> cartésienne, de retrouver des équivalents géométriques des classiques opérations de l'arithmétique. Que Descartes s'appuie sur la théorie euclidienne des proportions pour imaginer des opérations qui n'ont rien d'euclidien	53
Vers le <i>corps</i> des réels. Pourquoi certains exemples proposés par Descartes restent néanmoins susceptibles de faire l'objet d'une lecture euclidienne	56
Que Descartes accède à la connaissance directe d'objets, qu'on appellera un peu plus tard <i>fonctions</i> , et qui ne sont plus du premier ordre logique	60
Apollonius, Descartes, Dirichlet : l'élaboration progressive de la notion de <i>fonction</i> jusqu'à sa forme la plus générale	61
La notion de <i>limite</i> pour Aristote et pour le mathématicien moderne. La notion de <i>continuité</i> pour Aristote et pour Dedekind. Les artifices auxquels le mathématicien se permet de recourir. Le <i>théorème de Bolzano</i>	64
Comment Descartes, au livre I de sa <i>Géométrie</i> , ne s'appuie sur les divers modes de donation empruntés à la <i>théorie</i> euclidienne <i>des données</i> que pour les réduire à un seul	68
IV. LES DÉSIGNATIONS DES ÉCRITURES PROPREMENT	
MATHÉMATIQUES	73
Que les idéogrammes de la mathématique correspondent à un certain retour en arrière relativement à la seconde articulation qui s'est instaurée dans l'écriture il y a quelque trois millénaires	73
Que le calcul est substitution d'opérations sur les signes au raisonnement sur les choses. Qu'une telle substitution a pu parfois s'opérer avant même que leur auteur eût été capable d'accéder à ce raisonnement direct sur les choses. Leibniz et les « pensées aveugles »	75
Que l'écriture algébrique proposée par Viète et surtout par Descartes cumule d'abord deux démarches qu'il faut se garder de confondre : l'une de distinction, l'autre de généralisation	81

Qu'une troisième différenciation fondamentale obtenue par des moyens strictement scripturaires, déjà chez Fermat et, plus explicitement encore, chez Descartes, est entre la désignation des objets proprement géométriques et celle des grandeurs algébriques	83
Quatrième effet de cette écriture : l'intégration, obtenue par Viète et Descartes, du métalangage de la théorie euclidienne des <i>Données</i> au langage portant directement sur l'objet proprement mathématique, en un seul et même discours	84
Que le fait d'utiliser, dans une expression algébrique, les mêmes lettres non pas comme des inconnues, mais comme des variables, modifie radicalement le statut logique de cette expression. Que celle-ci, au lieu de renvoyer à des objets dont on ignorerait simplement la valeur, permet alors de désigner directement la relation elle-même entre de tels objets, laquelle, on l'a vu au chapitre précédent, n'est plus du tout du même ordre logique	86
Récapitulation des sept effets obtenus, dans le discours mathématique, par la vertu de l'écriture. Que, contrairement à certaines apparences, il n'est pas contestable que ces effets soient distincts	89
Bref retour sur le deuxième, puis sur les cinq derniers de ces sept effets. Que le discours logico-mathématique semble devoir se tenir à une unilinéarité bien tempérée	91
V. LES DIFFÉRENTES FINALITÉS DU RECOURS	
À L'AXIOMATIQUE	95
Que le recours à la procédure axiomatique peut correspondre à des exigences très différentes	95
Première situation : la conception des systèmes logico-mathématiques, constituée sur le modèle des fondements de la géométrie ; qu'on y part d'un ensemble de propositions initialement simplement postulées; qu'il ne peut alors y avoir d'autre critère de vérité que la non-contradiction	95
Deuxième situation : la possibilité de fonder les systèmes proprement logiques sur des bases sémantiques ; que ceci ne signifie pas que, sur de telles bases, on puisse, au delà du moins du simple <i>calcul des propositions</i> , accéder à des procédures qui soient décisives	103
Troisième situation, dans laquelle il n'y a pas identité entre l'ensemble des propositions syntaxiquement déductibles et	

celui des propositions sémantiquement valides, mais simple inclusion du premier dans le second. Qu'il existe ainsi en arithmétique des propositions sémantiquement vraies qui ne soient pas pour autant démontrables dans le système axiomatique qu'on peut mettre à la base de cette discipline	108
Quatrième situation, où le recours aux procédures hypothético-déductives a pour fonction de permettre de tirer des conséquences et propriétés communes, à partir de contextes dont les apparences très différentes pouvaient dissimuler l'identité de structure	109
Récapitulation des quatre usages de la méthode axiomatique. Que l'assimilation abusive, de la procédure axiomatique propre aux trois dernières situations, à celle de la première, peut induire à penser abusivement que toute la rigueur du mathématicien ne peut généralement s'exercer que dans les limites de ses propres présupposés	113
Les trois principales raisons qui ont pu encourager un tel préjugé : prédominance historique du modèle géométrique, méconnaissance initiale, par les promoteurs de la logique moderne, des justifications sémantiques des systèmes qu'ils élaboraient, importance croissante de la place occupée dans les mathématiques par l'étude directe des structures communes à des objets très différents	115
VI. CONCLUSION : SI ET COMMENT EXISTENT LES OBJETS	
DE LA MATHÉMATIQUE	121
Si l'on peut dire que les objets de la mathématique sont construits	121
Un sens trivial, dans lequel il est inévitable qu'on puisse parler de <i>construction</i>	122
La distinction traditionnelle entre théorèmes, qui énoncent des propriétés ou relations, et problèmes, qui expliquent comment construire. Que ces problèmes ont un équivalent théorématique	123
Que la quatrième des six étapes constitutives, selon Proclus, des propositions des <i>Éléments</i> d'Euclide, étape dite de <i>construction</i> , correspond elle-même à l'établissement d'un contenu théorique. La règle et le compas	126
Qu'on peut d'abord se demander si le premier ordre logique, auquel se tenaient les géomètres grecs, ne serait pas le seul qui échappât essentiellement à toute forme de construction.	

Qu'au contraire les thématizations par lesquelles on passe d'un ordre logique à un autre s'expriment plus sobrement par de nouveaux modes de quantification que par de prétendues constructions	129
Que le passage d'un ordre logique d'existence à un ordre supérieur peut se faire non seulement par recours à une relation d'équivalence, mais encore par caractérisation directe de la propriété d'ordre supérieur, définie, par exemple, par une axiomatique	132
Pourquoi il peut arriver au mathématicien de traiter de propriétés qui ne soient pas de même type, comme si elles étaient du même type	134
Que l'utilisation d'une relation d'équivalence pour définir un concept de type supérieur ne doit pas être confondue avec l'utilisation possible d'une telle relation d'équivalence pour définir un concept de même niveau logique	135
Que la différence entre les deux manières dont il semble que puissent s'obtenir les diverses thématizations peut modifier la perception que nous avons de celles-ci	136
Pourquoi un mathématicien comme Charles Hermite, soucieux d'affirmer l'existence des objets de la mathématique, privilégie l'exemple des nombres et des fonctions	137
Que l'ontologie que présupposent les mathématiques est encore loin d'embrasser néanmoins la totalité de celle que peut présupposer la grammaire du discours	139
INDEX	143
TABLE DES MATIÈRES	147